

Multivariate Realized Stochastic Volatility Models with Dynamic Correlation and Skew Distribution: Bayesian Analysis and Application to Risk Management

山下 大

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科
金融戦略・経営財務コース

2019 年 3 月 15 日

はじめに

- 本研究では、多変量 Stochastic Volatility モデル (MSV モデル) を用いて、複数の資産間の相関構造が確率的に変化するリスク (相関リスク) や、リターンの非対称性リスク (skew リスク) について分析する。
- また、リスク管理実務において直面する課題 (下述) への対応において、Bayesian 推計 (MCMC 法, 変分ベイズ法) の枠組みのもとで、MSV モデルを有効なツールとして活用する方法論を提案する。
- MSV モデルを適用する現実のデータとして、米 Dow 指数構成銘柄から 5 銘柄を選択し、株価リターン、および、高頻度取引データから推計した多変量 Realized Volatility のデータを用いて実証分析を行うとともに、当該データを用いて、MSV モデルを以下のリスク管理実務上の課題への対応に活用する手法を例示する。
 - ① 複数資産参照型金融商品の時価評価モデルにおける資産間相関パラメータ等は市場で観測されず、適切なヒストリカルデータの入手が難しい。 [Issue 1]
 - ② 純粋な市場観測データによるヒストリカルシミュレーションでは、ストレステストで求められる forward-looking なシナリオの設定が難しい。 [Issue 2]
 - ③ ヒストリカルマーケットデータにはしばしば欠測値が発生する。 [Issue 3]

Skew 分布: Skew t 分布

Skew t 分布は, Azzalini and Capitanio [2] で提唱される skew 分布.

Skew t 分布に従う $k \times 1$ ベクトル $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ は以下の PDF $f_{\mathbf{z}}$ をもつ:

Skew t 分布の PDF

$$\mathbf{z} \sim Skt(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}, \nu)$$

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}, \nu) = 2\psi(\mathbf{z}; \nu)\Psi\left(\boldsymbol{\alpha}'(\text{diag}(\boldsymbol{\Omega}))^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi})\left(\frac{\nu + k}{q_{\mathbf{z}} + \nu}\right)^{\frac{1}{2}}; \nu + k\right) \quad (1)$$
$$q_{\mathbf{z}} = (\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi})$$

- $\boldsymbol{\alpha} (\in \mathbb{R}^k)$: skew パラメータ. $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ のとき, Skew t 分布は通常の t 分布になる.
- $\nu (\in \mathbb{R}_{>0})$: t 分布の自由度.
- $\psi(\cdot; \nu)$: 自由度 ν の t 分布の PDF. $\Psi(\cdot; \nu)$: 自由度 ν の t 分布の CDF.
- $\boldsymbol{\xi} (\in \mathbb{R}^k)$: location パラメータ.
- $\boldsymbol{\Omega} (\in \mathbb{R}^{k \times k})$: 共分散行列.

Skew 分布: GH Skew t 分布

Generalized Hyperbolic (GH) Skew t 分布は, Aas [1] で提唱される skew 分布。
以下のように, 一般化逆ガウシアン (GIG) 分布を混合分布とする正規尺度平均混合 (Normal variance-mean mixture) として表現できるという特徴をもつ。

GH Skew t 分布

$$z \sim GHS(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\beta}, \nu, \delta)$$

$$z = \boldsymbol{\xi} + v\boldsymbol{\beta} + \sqrt{v}\mathbf{L}w$$

$$v \sim GIG\left(-\frac{\nu}{2}, \delta, 0\right) \quad (2)$$

$$w \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

- $\boldsymbol{\beta}$ ($\in \mathbb{R}^k$): skew パラメータ. $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ のとき, GH Skew t 分布は通常の t 分布 (ただし non-central & scaled) になる.
- δ ($\in \mathbb{R}_{>0}$): scale パラメータ¹.
- \mathbf{L} ($\in \mathbb{R}^{k \times k}$): 下三角行列 s.t. $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$.

¹Nakajima [8] 同様に, パラメータの数を節約するため, $\delta = \sqrt{\nu}$, $v \sim GIG(-\nu/2, \sqrt{\nu}, 0) \stackrel{d}{=} IG(\nu/2, \nu/2)$ ($IG(\cdot, \cdot)$: 逆ガンマ分布) と設定する.

MSV モデル: Cholesky MSV (CSV) モデル

CSV モデル (Lopes et al. [7]) は, 時点 t におけるリターン $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^k$ の誤差項が従う共分散行列 Σ_t を Cholesky 分解した $\mathbf{A}_t, \mathbf{H}_t$ (s.t. $\Sigma_t = \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{A}_t')^{-1}$) の各要素が独立に自己回帰過程に従うモデル.

CSV モデル

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_t \quad (\text{i.e. } \mathbf{y}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_t)) \\ \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} &= \text{diag}(\exp(\frac{h_{1,t}}{2}), \dots, \exp(\frac{h_{k,t}}{2})) \\ \mathbf{A}_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21,t} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{k1,t} & \dots & -a_{kk-1,t} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

対数 volatility 成分, 共分散成分はそれぞれ次の AR(1) 過程に従う:

MSV モデル: Cholesky MSV (CSV) モデル (cont.)

CSV モデル (cont.)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu}_{(h)} + \boldsymbol{\Phi}_{(h)}(\mathbf{h}_t - \boldsymbol{\mu}_{(h)}) + \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{a}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu}_{(a)} + \boldsymbol{\Phi}_{(a)}(\mathbf{a}_t - \boldsymbol{\mu}_{(a)}) + \boldsymbol{\xi}_t \\ \begin{pmatrix} \mathbf{e}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \\ \boldsymbol{\xi}_t \end{pmatrix} &\sim N \left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{h}_t &= (h_{1,t}, \dots, h_{k,t})' \\ \mathbf{a}_t &= (\tilde{a}_{1,t}, \dots, \tilde{a}_{p,t})' = (a_{21,t}, \dots, a_{kk-1,t})' \end{aligned} \tag{4}$$

- p : 共分散成分のインデックス数. $\boldsymbol{\Phi}_{(*)}$, \mathbf{Q} , \mathbf{S} , \mathbf{V} は対角行列².
- CSV モデルの利点として, 共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ の対称正定値性を保証しながら, その過程を, 独立な ($k + p$ 個の) 単変量過程によって表現できる.

² $\mathbf{Q} = \text{diag}(\{\rho_i \sigma_i\})$, $\mathbf{S} = \text{diag}(\{\sigma_i^2\})$, $\boldsymbol{\Phi}_{(*)} = \text{diag}(\{\phi_{(*)i}\})$, $\mathbf{V} = \text{diag}(\{v_i^2\})$ ($i = 1, \dots, k$) とおくことで ρ_i は資産 i の leverage パラメータを表す.

MSV モデル: Wishart MSV (WSV) モデル

共分散行列 Σ_t の対称正定値性を保証しながら, その過程を表現するモデルとして, 共分散行列が直接 Wishart 分布 ($W(\nu, \bar{\Sigma})$, $\bar{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$) に従うモデルがある. Wishart 分布のパラメータである scale 行列 $\bar{\Sigma}_t$ に, 係数行列による加法的な表現を設定した以下のモデルを WASP モデルと呼ぶことにする (Jin & Maheu [5] の特殊型).

WASP モデル

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &\sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_t) \\ \Sigma_t &\sim W(\nu, \bar{\Sigma}_{t-1}) \\ \nu \bar{\Sigma}_t &= \mathbf{B}_{(0)} + \mathbf{B}_{(1)} \Sigma_t \end{aligned} \tag{5}$$

- $\mathbf{B}_{(0)}$ ($\in \mathbb{R}^{k \times k}$): 対称正定値行列.
- $\mathbf{B}_{(1)}$ ($\in \mathbb{R}^{k \times k}$): rank-1 対称係数行列 ($\mathbf{B}_{(1)} = \mathbf{b}\mathbf{b}'$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ とパラメタライズする).

MSV モデル: skew の埋め込み

Nakajima [8] と同様のアプローチにより, 以下のようにして MSV モデルに skew 分布を埋め込む:

- CSV モデル: $\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{z}_t$
- WASP モデル: $\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}_t \mathbf{z}_t$ (s.t. $\mathbf{L}_t \mathbf{L}_t' = \boldsymbol{\Sigma}_t$)

skew 分布に従う資産間で独立な攪乱項 \mathbf{z}_t を設定し, 資産間で異なる skew の表現を可能とする.

- $\mathbf{z}_t \sim Skt(\mathbf{m}_{(st)}, \mathbf{I}, \boldsymbol{\alpha}, \nu_{(st)})$ or
- $\mathbf{z}_t \sim GHS(\mathbf{m}_{(ghs)}, \mathbf{I}, \boldsymbol{\beta}, \nu_{(ghs)}, \sqrt{\nu_{(ghs)}})^3$.

³ $\mathbf{m}_{(st)}, \mathbf{m}_{(ghs)}$ は, それぞれ $E[\mathbf{z}_t] = \mathbf{0}$ となるように設定する.

MSV モデル: 多変量 Realized Volatility の利用

MSV モデルの対数 volatility 過程/共分散成分過程と, "真の volatility" の推定量である Realized Volatility (RV) の間に以下の関係式を仮定することで, MSV モデルの推定精度向上を図る:

$$\begin{aligned} \mathbf{RV}_t &= \boldsymbol{\psi}_{(RV)} + \mathbf{h}_t + \mathbf{u}_{(RV)t} & \mathbf{u}_{(RV)t} &\sim N(\mathbf{0}, \sigma_{(RV)} \mathbf{I}) \\ \mathbf{RC}_t &= \boldsymbol{\psi}_{(RC)} + \mathbf{a}_t + \mathbf{u}_{(RC)t} & \mathbf{u}_{(RC)t} &\sim N(\mathbf{0}, \sigma_{(RC)} \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (6)$$

- $\boldsymbol{\psi}_{(*)}, \mathbf{u}_{(*)t}$ ($\in \mathbb{R}^k$ or \mathbb{R}^p): 誤差パラメータ.
- \mathbf{RV}_t ($\in \mathbb{R}^k$), \mathbf{RC}_t ($\in \mathbb{R}^p$): Barndorff et al. [3] で定義される対称正定値 Realized Kernel \mathbf{RK}_t ($\in \mathbb{R}^{k \times k}$) に対する Cholesky ファクター行列 $\bar{\mathbf{L}}_t$ (s.t. $\bar{\mathbf{L}}_t \bar{\mathbf{L}}_t' = \mathbf{RK}_t$) の, 対応する対角成分または下三角成分のベクトル.

実証分析: データ

流動性が高く、高頻度取引データが利用可能である米 Dow 指数構成銘柄から選択した 5 銘柄⁴ の株価日次リターンデータ (単位:%) に MSV モデルを適用する。

- $y_{i,t} = 100 \times \log(p_{i,t}/p_{i,t-1})$.
- $p_{i,t}$: 資産 i ($i \in \{1, \dots, 5\}$), 取引日 t ($t \in \{1, \dots, T\}$) における終値.

観測変数 \mathbf{y}_t , \mathbf{RV}_t , \mathbf{RC}_t ⁵ の観測期間の長さは $T = 1,000$ 日とし、次の 2 種類の期間のデータセットを用いる。

- (i) 2005-01-03 - 2009-12-21
- (ii) 2013-09-24 - 2018-08-31

Table: リターン $\{y_{i,t}\}$ (%) の記述統計量 (i)

i	asset	mean	sd	skewness	kurtosis
1	JPM	0.018	3.690	0.334	11.837
2	IBM	0.039	1.643	0.194	7.822
3	MSFT	0.048	2.106	0.192	11.596
4	XOM	0.027	2.070	0.238	17.117
5	AA	-0.025	3.676	-0.154	8.450

Table: リターン $\{y_{i,t}\}$ (%) の記述統計量 (ii)

i	asset	mean	sd	skewness	kurtosis
1	JPM	-0.089	1.263	-0.488	5.869
2	IBM	-0.143	1.149	-0.356	10.503
3	MSFT	-0.009	1.375	-0.068	10.762
4	XOM	-0.155	1.065	-0.580	6.457
5	AA	-0.756	1.987	-2.900	22.126

⁴ JP Morgan (JPM), IBM (IBM), Microsoft (MSFT), Exxon Mobil (XOM) and American Express (AA).

⁵ Realized Kernel のデータについて、データセット (i) は、Oxford-Man Institute's Realized Library の website (<https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/>) から抽出したものを、データセット (ii) は、高頻度データから同様の手順で作成したものを、用いる。

実証分析: 推定方法

MCMC 法により各 MSV モデルの推定を行う。具体的には, Stan⁶ を用いた Hamiltonian Monte Carlo 法によりパラメータの事後分布 $p(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{y}_t\})$ を 10,000 回シミュレートし, 後半 5,000 回のサンプルから得られた事後分布より推計結果を得る。事前分布の設定は以下のとおり⁷:

- CSV モデル

- ▶ $\mu_{(*)i} \sim N(0, 100)$; $(1/2)(\phi_{(*)i} + 1) \sim \text{Beta}(20, 1.5)$.
- ▶ $\sigma_{(*)i}^{-2} \sim \text{Gamma}(20, 0.01)$; $v_{(*)i}^{-2} \sim \text{Gamma}(20, 0.01)$.

- WASP モデル

- ▶ $\mathbf{B}_{(0)} \sim W(\nu, \mathbf{I})$; $b_i \sim N(0, 100)$ ($b_i \in \mathbf{b}$)⁸.
- ▶ $\nu \sim \text{Gamma}(2, 1)$.

- 共通

- ▶ $\alpha_i \sim N(0, 1)$; $\beta_i \sim N(0, 1)$
- ▶ $\nu_{(*)} \sim \text{Gamma}(2, 1)$.

そのほか, 本推定においては, skew の効果に焦点を置く狙いから, リターンの leverage パラメータ (ρ) および 平均パラメータ ($\boldsymbol{\mu}$) は $\mathbf{0}$ と設定する。

⁶Stan Development Team. <http://mc-stan.org>

⁷記載の無いパラメータは無事前情報分布として一様分布を設定する。

⁸ただし, identification のため, b_1 のみ $\sim \text{Gamma}(2, 1)$ 。

実証分析: 結果 - WAIC

Table: WAIC

#	model				(i)		(ii)	
		MSV	Skew	RV	WAIC	S.E.(WAIC)	WAIC	S.E.(WAIC)
1	CSV	CSV	no	no	9198.46	0.57	9195.92	0.35
2	RCSV	CSV	no	yes	9192.73	0.17	9194.92	0.27
3	RCSV-Skt	CSV	Skew t	yes	5546.52	2.36	5521.71	9.03
4	RCSV-GHS	CSV	GHS	yes	9346.12	0.29	9350.35	0.47
5	RWASP	WASP	no	yes	18727.49	243.04	18225.57	208.61
6	RWASP-Skt	WASP	Skew t	yes	16953.68	138.05	15544.56	133.90
7	RWASP-GHS	WASP	GHS	yes	16637.21	120.84	15464.38	119.29

- RCSV に Skew t 分布を埋め込むことにより、モデル精度の大きな改善がみられた。
- RWASP についても、Skew t 分布、GH Skew t 分布両方について skew の埋め込みによる精度向上がみられている。
- RV 利用の効果については、CSV と RCSV を比較すると、推定の安定性向上 (事後分布の分散抑制) の効果はあるものの、モデルの予測精度上は大きな効果はみられなかった⁹。

⁹ただし、RV モデルは、推定に用いるデータが非 RV モデルより RV の分だけ多いため、両者間では WAIC の単純比較によるモデル精度評価は妥当でない。

実証分析: 結果 - パラメータ

- WASP モデルは, CSV モデルに比較してモデル精度は劣後するものの, 係数行列 $B_{(0)}, B_{(1)}$ の各成分の推定値は有意¹⁰に推定されており, 相応のモデルの妥当性が示されている.
- skew パラメータ (α, β) は, RCSV-GHS においては有意に推定されなかったが¹¹, RCSV-Skt, RWASP-Skt, RWASP-GHS において有意に推定されており, skew パラメータの有効性が確認できた.
- ただし, CSV モデルについては, 構造上, 1 番目の資産 $(y_{1,t})$ とその他の資産との間に強い依存関係があることから, skew パラメータの推定結果が各資産の特性を適切に反映していない可能性が高い. このため, 資産毎の特性に焦点をあてて分析する場合には, WSV モデルのほうが適切といえる.
- そのほか, RV にかかるパラメータや CSV モデルのパラメータ推定結果は先行研究と整合的である; RV 計算上の取引時間未考慮に起因すると思われる過小評価から, 誤差パラメータ $(\psi_{(RV)})$ は負に推定されている. また, 対数ボラティリティおよび共分散成分の自己回帰係数 $(\phi_{(*)})$ は 0.9 程度の 1 に近い値で推定されており, ボラティリティの持続性が反映されている.

¹⁰95%信用区間にゼロが含まれないことを意味することにする.

¹¹GH Skew t 分布については, パラメータ数削減のための設定に起因して skew 表現に制約が生じている可能性がある.

実証分析: 結果 - 相関

- 推定された時変共分散行列 (Σ_t) から得られた時変相関をみると, RWASP-Skt の時変相関は, 日次リターンから計算されたヒストリカル相関と平均的な水準は似ているが, 市場変動に対してより感応的に変動している. また, 日次リターンのノイズに対してより頑健であると考えられることから, ヒストリカルシミュレーション法のマーケットデータ等の用途で用いるのにより適切なデータであるといえる ([Issue 1] への対応). 一方で, RCSV-Skt の時変相関については, ヒストリカル相関と水準が大きくかい離するケースがみられており, 推定された相関の値として適切に評価するという観点においても, WSV モデルがより適切であることを示唆している.

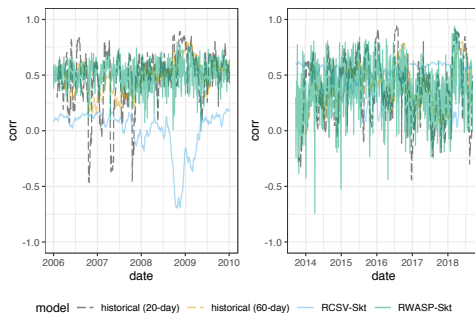


Figure: 時変相関 (asset 1 & 2)

リスク管理への応用: Bayesian 予測

MCMC 法の枠組みを利用することで, MSV モデルにもとづく予測値 $\{\mathbf{y}_t\}_{t=T+1}^{T+N_f}$ (N_f : 予測時点数) も, 推定パラメータとみなして事後分布を得ることができる.

- シミュレートする事後分布: $p(\{\mathbf{y}_t\}_{t=T+1}^{T+N_f}, \boldsymbol{\theta} | \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T)$.

以下手順を $m = 1$ から M まで繰り返すことで, Bayesian 予測にもとづく観測時点数 $M \times N_f$ の仮想シナリオ $\{\hat{\mathbf{y}}_t\}$ を MSV モデル A から得ることができる:

- Step 1: MCMC 法で事後分布 $p\left(\{\mathbf{y}_t\}_{t=T_m+1}^{T_m+N_f}, \boldsymbol{\theta}_{(A)} | \{\mathbf{y}_t\}_{t=(m-1)N_f+1}^{T_m}\right)$ をシミュレートする。
($T_{m+1} = T_m + N_f$, $\boldsymbol{\theta}_{(A)}$: MSV モデル A に紐づくパラメータ集合.)
- Step 2: $\{\hat{\mathbf{y}}_t\} := \{E[\mathbf{y}_t]\}_{t=T_m+1}^{T_m+N_f}$ として保存する.

このようにして得られた仮想シナリオは, 通常の時系列モデルによる予測同様に過去データにもとづいてキャリブレートされていないながら,

- 1 推定パラメータ自体の不確実性が含まれる.
- 2 モデル A の選択を通じて, 取り込みたい不確実性を **forward-looking** に設定できる.
- 3 事後分布から予測値の妥当性評価を行うことが容易.

といった利点があり, ストレステスト等における仮想的シナリオに有用である ([Issue 2] への対応).

リスク管理への応用: Bayesian 予測 (cont.)

以下はデータセット (i), $N_f = 5$, $M = 100$ での実施結果例¹². "C-CSV-GHS" は, 非時変の相関を設定したもの ($\mathbf{A}_t \rightarrow \mathbf{A}$ in (3)). 各モデルの設定に従った不確実性が反映されている.

Table: 生成された平均リターンシナリオ $\{\frac{1}{k} \sum_i \hat{y}_{i,t}\}$ の記述統計量, VaR および ES

model	mean	sd	skewness	kurtosis	99% VaR	97.5% ES
C-CSV-GHS	0.00	0.07	0.05	3.12	-0.17	-0.16
CSV	0.01	0.12	0.01	3.51	-0.29	-0.29
CSV-GHS	0.01	0.12	0.18	3.23	-0.27	-0.27

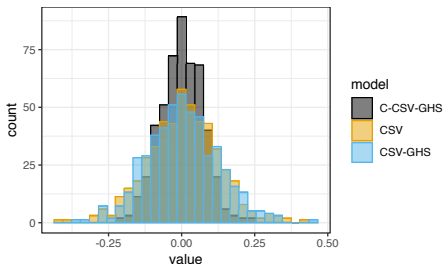


Figure: 生成された平均リターンシナリオ $\{\frac{1}{k} \sum_i \hat{y}_{i,t}\}$ のヒストグラム

¹²ただし, ここでは, MCMC 法ではなく変分ベイズ法 (VI) による近似シミュレーションを利用したもの.

リスク管理への応用: Bayesian 欠測値補完

観測変数データ $\{\mathbf{y}_t\}$ に欠測値が含まれている場合に、当該データを観測値 $\{\mathbf{y}_{(obs)s}\}$, 欠測値 $\{\mathbf{y}_{(mis)u}\}$ と分けると, Bayesian 予測同様に, 欠測値についても, 以下のようにパラメータとして扱い推定することができる ([Issue 3] への対応).

- シミュレートする事後分布: $p(\{\mathbf{y}_{(mis)u}\}, \boldsymbol{\theta} | \{\mathbf{y}_{(obs)s}\})$.

例として, 資産 i についてのみ, $y_{i,t}$ ($t = 1, \dots, T$) が独立に確率 p_{mis} で欠測値である状況を仮定してデータセット (i)(ii) を修正し, Bayesian 欠測値推定を行う. このとき, MSV モデル A でシミュレートする事後分布は, $p(\{y_{i,u}\}, \boldsymbol{\theta}_{(A)} | \{\mathbf{y}_{-i,t}\}, \{y_{i,s}\})$ となる.

$p_{mis} = 0.3$ として, 各資産, 各モデルについて上記手順を (毎回異なる乱数 seed で) 15 回繰り返し, それぞれについて, 約 10,000 観測日の欠測値補完を行った¹³. 使用モデルは, I-CSV (単変量 SV モデル), C-CSV (非時変相関 CSV モデル), CSV, および AR(1).

Table: 推定された欠測値の Mean Squared Errors (asset 2 の結果を抜粋)

asset	model	MSE	S.E.(MSE)	mean \hat{k}	$\hat{k} < 0.7$ proportion
2	AR(1)	2.09	0.07	0.92	0.19
2	I-CSV	2.12	0.07	0.94	0.13
2	C-CSV	1.62	0.05	0.96	0.09
2	CSV	2.20	0.08	0.96	0.09

¹³ただし, ここでも MCMC 法では計算負荷が高いことから, VI による近似シミュレーションを利用した. VI による事後分布近似度の評価指標として, Yao et al. [10] で提唱されている, \hat{k} 指標 ($\hat{k} < 0.7$ のとき, VI による近似事後分布が真の事後分布の有用な情報を含んでいると評価する) をあわせて計算した.

結論

- 本研究では、2つの異なるタイプの時変相関 MSV モデル (CSV モデル および WSV モデル) を、複数の skew 分布 (Skew t 分布および GH Skew t 分布) と組み合わせて研究した。skew 分布を MSV モデルに取り入れることで、WAIC の観点からモデルパフォーマンスが大幅に向上することが確認され、資産リターンにおける skew の重要性が確認できた。
- CSV モデルは全体的な予測精度の点で高いパフォーマンスを発揮する一方、モデル上の資産順序設定にセンシティブであるという構造上のデメリットがあり、idiosyncratic な skew 特性を捉える上では、WSV モデルの方がより優位性がある可能性があるという知見が得られた。
- 同様に、WSV モデルによって推定された資産間の動的相関は、ヒストリカルマーケットデータとして、CSV モデルによるそれよりも適切なデータとなりうることがわかった。
- また、MSV モデルは、Bayesian シミュレーションの枠組みの下で、仮想シナリオの生成や欠測データ補完といった、リスク管理実務における問題に対応するための手法において有効に活用できることが示された。

主要な参考文献

- [1] Kjersti Aas and Ingrid Hobæk Haff. “The generalized hyperbolic skew Student's t-distribution”. In: *Journal of Financial Econometrics* 4.2 (2006), pp. 275–309.
- [2] Adelchi Azzalini and Antonella Capitanio. “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution”. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 65.2 (2003), pp. 367–389.
- [3] Ole E Barndorff-Nielsen et al. “Multivariate realised kernels: consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading”. In: *Journal of Econometrics* 162.2 (2011), pp. 149–169.
- [4] Andrew Gelman et al. *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2013.
- [5] Xin Jin and John M Maheu. “Modeling realized covariances and returns”. In: *Journal of Financial Econometrics* 11.2 (2012), pp. 335–369.
- [6] Alp Kucukelbir et al. “Automatic Differentiation Variational Inference”. In: *The Journal of Machine Learning Research* 18.1 (2017), pp. 430–474.
- [7] HF Lopes, RE McCulloch, and R Tsay. “Cholesky stochastic volatility models for high-dimensional time series”. In: *Discussion papers* (2012).
- [8] Jouchi Nakajima. “Bayesian analysis of multivariate stochastic volatility with skew return distribution”. In: *Econometric Reviews* 36.5 (2017), pp. 546–562.
- [9] Mike West and Jeff Harrison. *Bayesian forecasting and dynamic models*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] Yuling Yao et al. “Yes, but Did It Work?: Evaluating Variational Inference”. In: *arXiv preprint arXiv:1802.02538* (2018).