

確率的高次モーメントを組み込んだ
Stochastic Volatility モデルの提案:
ボラティリティ及び収益率の予測パフォーマンス検証

木原 悠介

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科
経営・金融専攻
金融戦略・経営財務コース

2018 年 3 月 15 日

はじめに

- 本研究では、確率ボラティリティ（Stochastic Volatility, SV）モデルを拡張することで、市場データをよりよく捉えることができるか検討する。
- 標準的な SV モデルは、収益率の誤差分布に正規分布が仮定されるが、市場データの非正規性を捉えるため、一般化双曲型（Generalized Hyperbolic, GH）非対称 t 分布を仮定したモデル、及びその高次モーメントを確率変動させたモデルを提案する。また、高頻度データから計算される実現ボラティリティを組み込んだモデル化も行う。
- 提案モデルについて、日本国債先物、日米株価指数データによる実証分析を行う。MCMC 法によりモデルパラメータを推計し市場特性を分析するほか、ボラティリティ及び収益率の予測パフォーマンスを検証する。

モデル一覧

本研究で分析の対象とするモデルは以下の通りである。

モデル	誤差分布	平均	歪度/尖度	実現ボラティリティ	先行研究
SVn	正規	0	–	–	[Taylor(1982)] 等
SVskt	GH 非対称 t	0	静的	–	[Nakajima(2012)]
SVsktSK	GH 非対称 t	0	動的	–	[Nozawa(2016)]
SVsktSKm	GH 非対称 t	$\beta_M M_t$	動的	–	–
RSVn	正規	0	–	○	[Takahashi(2009)]
RSVskt	GH 非対称 t	0	静的	○	[Takahashi(2016)]
RSVsktSK	GH 非対称 t	0	動的	○	–
RSVsktSKm	GH 非対称 t	$\beta_M M_t$	動的	○	–

以下では、各モデルの詳細について述べる。

SVn モデル

収益率 y の誤差分布を正規分布 \mathcal{N} とし、対数ボラティリティ h が 1 次の自己回帰構造に従い、誤差項間は相関 ρ を有する、最も標準的な SV モデル。ただし、添字の t は時点を表す。

SVn モデル

$$y_t = e^{\frac{h_t}{2}} \varepsilon_{y,t}, \quad \varepsilon_{y,t} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$
$$h_{t+1} = \mu_h + \phi_h(h_t - \mu_h) + \sigma_h \varepsilon_{h,t}, \quad \varepsilon_{h,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{Cor}(\varepsilon_{y,t}, \varepsilon_{h,t}) = \rho.$$

- データ : y
- パラメータ : $h, \mu_h, \phi_h, \sigma_h, \rho$
- 確率変数 : $\varepsilon_y, \varepsilon_h$

SVskt モデル

収益率 y の誤差分布を GH 非対称 t 分布としたモデル [Nakajima(2012)]. GH 非対称 t 分布は、標準正規分布に従う確率変数と、逆ガンマ分布に従う確率変数の混合和として表現でき、歪度と尖度に影響を与えるパラメータ (γ, ν) を含む. その他は SVn モデルと共通である.

SVskt モデル

$$y_t = \frac{\gamma(z_t - \mu_z) + \sqrt{z_t} \varepsilon_{y,t}}{\sqrt{\gamma^2 \sigma_z^2 + \mu_z}} e^{\frac{h_t}{2}}, \quad \varepsilon_{y,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad z_t \sim \text{IG}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right),$$

$$h_{t+1} = \mu_h + \phi_h(h_t - \mu_h) + \sigma_h \varepsilon_{h,t}, \quad \varepsilon_{h,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{Cor}(\varepsilon_{y,t}, \varepsilon_{h,t}) = \rho.$$

- データ : y
- パラメータ : $h, \mu_h, \phi_h, \sigma_h, \rho, \gamma, \nu, \mu_z = E[z_t], \sigma_z^2 = V[z_t]$
- 確率変数 : $\varepsilon_y, \varepsilon_h, z$

SVsktSK モデル

収益率の誤差分布を GH 非対称 t 分布とし, その歪度や尖度に影響を与えるパラメータ (γ, ν) を確率的に変動させたモデル [Nozawa(2016)].

SVsktSK モデル

$$y_t = \frac{\gamma_t(z_t - \mu_{z,t}) + \sqrt{z_t}\varepsilon_{y,t}}{\sqrt{\gamma_t^2\sigma_{z,t}^2 + \mu_{z,t}}} e^{\frac{h_t}{2}}, \quad \varepsilon_{y,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad z_t \sim \mathcal{IG}\left(\frac{\nu_t}{2}, \frac{\nu_t}{2}\right),$$

$$h_{t+1} = \mu_h + \phi_h(h_t - \mu_h) + \sigma_h\varepsilon_{h,t}, \quad \varepsilon_{h,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{Cor}(\varepsilon_{y,t}, \varepsilon_{h,t}) = \rho$$

$$\gamma_{t+1} = \mu_\gamma + \phi_\gamma(\gamma_t - \mu_\gamma) + \sigma_\gamma\varepsilon_{\gamma,t}, \quad \varepsilon_{\gamma,t} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\delta_{t+1} = \mu_\delta + \phi_\delta(\delta_t - \mu_\delta) + \sigma_\delta\varepsilon_{\delta,t}, \quad \varepsilon_{\delta,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \nu_t = 8 + \exp(\delta_t).$$

- データ : y
- パラメータ : $h, \mu_h, \phi_h, \sigma_h, \rho, \gamma, \mu_\gamma, \phi_\gamma, \sigma_\gamma, \delta, \mu_\delta, \phi_\delta, \sigma_\delta, \mu_{z,t} = E[z_t], \sigma_{z,t}^2 = V[z_t]$
- 確率変数 : $\varepsilon_y, \varepsilon_h, z, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\delta$

SVsktSKm モデル

SVsktSK モデルの収益率に各時点のモーメント M_t (ボラティリティ $e^{\frac{h_t}{2}}$ または歪度 s_t または尖度 k_t) を加えたモデル. 各モーメントの係数を $\beta_v, \beta_s, \beta_k$ とする.

SVsktSKm モデル

$$y_t = \frac{\gamma_t(z_t - \mu_{z,t}) + \sqrt{z_t}\varepsilon_{y,t}}{\sqrt{\gamma_t^2\sigma_{z,t}^2 + \mu_{z,t}}} e^{\frac{h_t}{2}} + \beta_M M_t, \quad \varepsilon_{y,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad z_t \sim \text{IG}\left(\frac{\nu_t}{2}, \frac{\nu_t}{2}\right),$$

$$h_{t+1} = \mu_h + \phi_h(h_t - \mu_h) + \sigma_h\varepsilon_{h,t}, \quad \varepsilon_{h,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{Cor}(\varepsilon_{y,t}, \varepsilon_{h,t}) = \rho$$

$$\gamma_{t+1} = \mu_\gamma + \phi_\gamma(\gamma_t - \mu_\gamma) + \sigma_\gamma\varepsilon_{\gamma,t}, \quad \varepsilon_{\gamma,t} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\delta_{t+1} = \mu_\delta + \phi_\delta(\delta_t - \mu_\delta) + \sigma_\delta\varepsilon_{\delta,t}, \quad \varepsilon_{\delta,t} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \nu_t = 8 + \exp(\delta_t).$$

- データ : y
- パラメータ : $h, \mu_h, \phi_h, \sigma_h, \rho, \gamma, \mu_\gamma, \phi_\gamma, \sigma_\gamma, \delta, \mu_\delta, \phi_\delta, \sigma_\delta,$
 $\mu_{z,t} = E[z_t], \sigma_{z,t}^2 = V[z_t], \beta_M(\beta_v, \beta_s, \beta_k)$
- 確率変数 : $\varepsilon_y, \varepsilon_h, z, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\delta$

RSV モデル

上記 SV モデル群の他、実現ボラティリティを利用した Realized SV (RSV) モデルを定義する。まず、時点 t の実現ボラティリティの対数值 x_t と潜在的な対数ボラティリティ h_t の間に以下の関係を仮定する。

$$x_t = \xi + h_t + \sigma_x \varepsilon_{x,t}, \quad \varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (\star)$$

このとき、RSV モデル群を以下の通り定義する。

- RSVn モデル
 - SVn モデルに (★) 式を加えたモデル [Takahashi(2009)].
- RSVskt モデル
 - SVskt モデルに (★) 式を加えたモデル [Takahashi(2016)].
- RSVsktSK モデル
 - SVsktSK モデルに (★) 式を加えたモデル.
- RSVsktSKm モデル
 - SVsktSKm モデルに (★) 式を加えたモデル.

実証分析

提案モデルについて、市場データを用いた実証分析を行う。

- データは 2006 年 1 月 2 日～2014 年 3 月 20 日の日本国債先物 (JGB), 日経平均株価指数 (NKY), S&P500 株価指数 (SPX) を用いる。なお, JGB のデータ (価格) は JPX より購入し, NKY と SPX のデータ (価格, ボラティリティ) は Oxford-Man Institute の Realized Library から取得した。
- 実現ボラティリティはノイズに頑健な Realized Kernel (RK, [Barndorff-Nielsen(2008)]) を利用した。JGB についての RK の計算は [Barndorff-Nielsen(2009)] を参考にした。
- 全ての資産で収益率の平均が 0 であることを否定できず, 自己相関は見出だせなかったため, そのまま提案モデルの推計を行う。ただし, (R)SVsktSKm モデルの推計では, 各モーメントが与える影響を測るため, 平均を除いたデータを利用した。

推計法

- SV モデル群のパラメータを最尤法で推定することは難しい。そこで、事前分布を仮定した上でマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法による事後分布からのサンプリングを利用し、パラメータについての推論を行う。
- MCMC 法のサンプリング回数を 15,000 回とし、最初の 5,000 回をバーンイン期間として捨て、残りの 10,000 回のサンプルを用い、事後平均、収束判定指標 (Geweke の CD)、効率性評価指標 (非効率性因子 IF) 等を評価した。なお、事前分布は先行研究を参考に以下の通り定めた。

$$\mu_h \sim \mathcal{N}(-10, 2^2), \quad \frac{1 + \phi_h}{2} \sim \mathcal{B}(20, 1.5), \quad \sigma_h^2 \sim \mathcal{IG}(2.5, 0.025),$$

$$\frac{1 + \rho}{2} \sim \mathcal{B}(1, 2), \quad \gamma \sim \mathcal{N}(0, 1^2), \quad \nu \sim \mathcal{G}(5, 0.5),$$

$$\mu_\gamma \sim \mathcal{N}(-0.5, 0.25^2), \quad \frac{1 + \phi_\gamma}{2} \sim \mathcal{B}(20, 1.5), \quad \sigma_\gamma^2 \sim \mathcal{IG}(10, 0.1),$$

$$\mu_\delta \sim \mathcal{N}(2, 0.5^2), \quad \frac{1 + \phi_\delta}{2} \sim \mathcal{B}(20, 1.5), \quad \sigma_\delta^2 \sim \mathcal{IG}(10, 0.1),$$

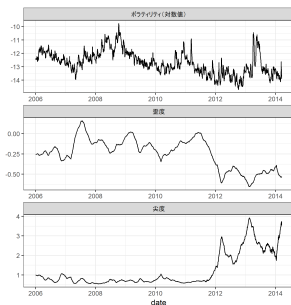
$$\xi \sim \mathcal{N}(0, 1^2), \quad \sigma_x^2 \sim \mathcal{IG}(2.5, 0.1), \quad \beta_M \sim \mathcal{N}(0, 0.5^2).$$

推計結果

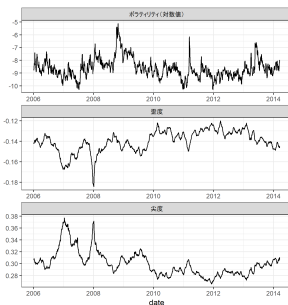
- SV モデル群よりも RSV モデル群の方が CD の観点で推計結果が安定し、かつ IF の観点で効率的である（実現ボラティリティを利用する意義）。
- ボラティリティの自己回帰係数 ϕ_h は 1 に近く、ボラティリティの持続性を捉えている（先行研究と整合的）。
- 収益率とボラティリティの誤差項間の相関 ρ は負に推計され、ボラティリティの非対称性（資産価格が下落した翌日の方が、資産価格が上昇した翌日よりボラティリティが上昇しやすい）を捉えている。ただし JGB ではその程度は小さい。
- GH 非対称 t 分布の γ は 95%信用区間に 0 を含まず負に、 ν は 15 から 25 程度の値が推計された。これは、収益率分布が右に歪み、裾が正規分布よりも厚いことを捉えている（高次モーメントを組み込む意義）。
- RSV モデル群の ξ はマイナスに推計され、実現ボラティリティが潜在的なボラティリティに比べ過小評価されている。これは、夜間などの非取引時間の影響が大きいことを示唆している。
- ξ は SPX より NKY の方が絶対値が大きく、 ρ は NKY より SPX の方が絶対値が大きい。これは、米国市場が自身の動きの影響を翌日に反映しやすいのに対し、日本市場は海外市場の影響を強く受けることを示唆している。

推計結果

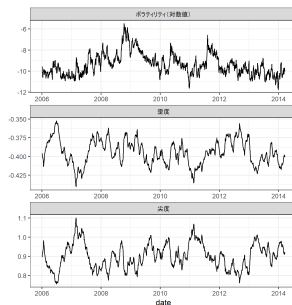
- JGB の動的な歪度や尖度は、株式市場のそれよりも大きく動いている。



JGB



NKY



SPX

- β_v は 0 であることを否定できなかったが、 β_s は負に、 β_k は正に推計された。収益率に対して歪度は負の、尖度は正のリスクプレミアムとして、それぞれ機能している可能性がある。

ボラティリティ及び収益率の予測

次に、各モデルのボラティリティ及び収益率の予測パフォーマンスを検証する。

- 対象モデル
 - RSV モデル群の 4 つ (RSVsktSKm モデルのモーメントは歪度) とする。
- 予測の方法
 - 2008 年 1 月 15 日までの 500 営業日のデータを用い MCMC 推計を行い、1 期先のボラティリティ及び収益率の予測分布を得る。データを 1 営業日分進め、再度 MCMC 推計を行い、1 期先の予測分布を得る。これを 2014 年 3 月 20 日の予測分布が得られるまで繰り返す (約 1,500 営業日 \times 4 モデル \times 3 資産)。
 - MCMC 法のサンプリング回数を 5,000 回とし、最初の 1,000 回をバーンイン期間として捨てる。
- ボラティリティ予測の評価
 - 取引時間を調整 ([Hansen(2005)]) した RK を真のボラティリティの代理変数 $\hat{\sigma}_{true,t}^2$ とし、ボラティリティの予測値 (事後平均) $\sigma_{pred,t}^2$ について以下の損失関数を計算し、モデルの優劣を評価する [Patton(2011)]。

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\sigma}_{true,t}^2 - \sigma_{pred,t}^2)^2, \quad QLIKE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{\hat{\sigma}_{true,t}^2}{\sigma_{pred,t}^2} - \log \frac{\hat{\sigma}_{true,t}^2}{\sigma_{pred,t}^2} - 1 \right).$$

ボラティリティ予測の評価

ボラティリティ予測における損失関数の評価

資産	モデル	MSE	QLIKE
JGB	RSVn	5.61×10^{-11}	0.245
	RSVskt	5.55×10^{-11}	0.239
	RSVsktSK	5.48×10^{-11}	0.232
	RSVsktSKm	5.51×10^{-11}	0.237
NKY	RSVn	2.56×10^{-7}	0.191
	RSVskt	2.48×10^{-7}	0.186
	RSVsktSK	2.50×10^{-7}	0.187
	RSVsktSKm	2.52×10^{-7}	0.189
SPX	RSVn	9.71×10^{-8}	0.182
	RSVskt	9.54×10^{-8}	0.172
	RSVsktSK	9.58×10^{-8}	0.175
	RSVsktSKm	9.65×10^{-8}	0.181

- MSE, QLIKE いずれの観点からも, JGB は RSVsktSK モデルが, NKY と SPX は RSVskt モデルが最もよい予測を与えている. JGB は高次モーメントが大きく変動し, NKY や SPX はそれほど変動していなかったが, その性質と整合的である.

収益率予測の評価 I

- 時点 t の予測分布における分位点 $\alpha\%$ の値を $VaR_t(\alpha)$ とし、実際の収益率 y_t が $VaR_t(\alpha)$ を下回った割合を計算する。予測分布が収益率の分布を正しく捉えていれば、その割合は分位点 $\alpha\%$ に等しくなる。
- ここでは、 $\alpha = 1, 2.5, 5, 25, 50, 75, 95, 97.5, 99$ とした場合の結果を評価するため、[Kupiec(1995)] による尤度比検定を行う。 $y_t < VaR_t(\alpha)$ となる確率 q が日々独立であるという条件において、サンプルサイズを N 、 $y_t < VaR_t(\alpha)$ となる回数を $n(\alpha)$ とすると、尤度比検定統計量 λ は

$$\lambda = 2 \ln \frac{q^{n(\alpha)}(1-q)^{N-n(\alpha)}}{\alpha^{n(\alpha)}(1-\alpha)^{N-n(\alpha)}}$$

で与えられ、帰無仮説「 $q = \alpha$ 」のもとで自由度 1 の χ^2 分布に従う。 p 値が大きい場合に帰無仮説が棄却されず、分位点を正しく予測できていると判断する。

収益率予測の評価 II

Kupiec の尤度比検定の p 値 (%)

資産	モデル	1%点	2.5%点	5%点	25%点	50%点	75%点	95%点	97.5%点	99%点
JGB	RSVn	15.4	85.7	54.4	2.3	0.9	6.8	19.3	73.2	64.1
	RSVskt	47.6	85.7	98.1	6.3	4.0	6.0	41.6	88.2	39.7
	RSVsktSK	96.7	41.0	92.5	10.6	7.2	1.9	56.8	62.9	4.2
	RSVsktSKm	47.6	88.2	28.7	90.6	83.7	85.9	1.5	75.3	0.7
NKY	RSVn	0.1	0.0	0.1	89.3	31.3	1.7	15.6	46.0	17.1
	RSVskt	80.3	9.2	2.8	43.0	58.7	0.8	4.8	36.1	28.1
	RSVsktSK	78.7	22.1	1.6	54.2	62.3	4.3	2.8	46.0	28.1
	RSVsktSKm	31.2	1.0	0.8	15.0	36.5	9.4	10.0	57.0	9.5
SPX	RSVn	0.0	0.0	0.4	2.1	0.0	18.0	85.2	43.5	51.5
	RSVskt	89.5	24.8	32.4	40.9	14.0	18.0	38.3	83.3	90.2
	RSVsktSK	53.0	2.7	15.2	23.8	11.5	13.0	22.6	59.6	90.2
	RSVsktSKm	0.8	0.0	0.2	63.9	38.7	95.3	96.3	54.0	70.1

- NKY や SPX では、RSVn モデルでは分布の下方を捉えられず、歪度や尖度を考慮した RSVskt モデルを用いる方がよい。一方、JGB のように高次モーメントが大きく変動している場合は、RSVsktSK(m) モデルが優れている。
- RSVsktSKm モデルはいずれの資産でも分布の中央をよく捉えている。

結論

本研究では、SV モデルの誤差分布に正規分布や GH 非対称 t 分布を仮定した複数のモデルで実証分析を行い、以下を明らかにした。

- 高頻度データから計算される実現ボラティリティを組み込むことで、モデル推計が安定し、かつ、効率性も改善する。
- 全ての資産で収益率の分布が右に歪み、分布の裾が正規分布よりも厚い。
- 収益率に対して歪度は負の、尖度は正のリスクプレミアムを有している可能性がある。
- 株式市場と比べボラティリティが低い日本国債先物においては、高次モーメントが株式市場のそれよりも大きく変動している。
- ボラティリティ及び収益率の予測では、誤差分布を GH 非対称 t 分布としたモデルの予測力が、誤差分布を正規分布としたモデルよりも優れている。特に、JGB については提案モデルのパフォーマンスが最も優れている。
- 収益率の説明変数として歪度を加えることで、収益率分布をよりよく捉えられる可能性がある。

主要参考文献 I



Barndorff-Nielsen, O E., Peter Reinhard Hansen, Asger Lunde, and Neil Shephard

Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise.

Econometrica, Vol. 76, No. 6, pp. 1481-1536, 2008.



Barndorff-Nielsen, O. E., P. Reinhard Hansen, A. Lunde, and N. Shephard

Realized kernels in practice: trades and quotes.

Econometrics Journal, Vol. 12, No. 3, pp. C1C32, 2009.



Hansen, P. R. and A. Lunde

A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data.

Journal of Econometrics, Vol. 3, No. 4, pp. 525-554, 2005.



Kupiec, Paul H.

Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models.

The Journal of Derivatives, Vol. 3, No. 2, pp. 7384, 1995.

主要参考文献 II



Nakajima, J. and Y. Omori

Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student' s tdistribution.

Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 56, No. 11, pp.3690 - 3704, 2012.



Nozawa, Y. and N. Nakamura

Stochastic volatility models with stochastic skewness and kurtosis.

Proceedings of the 45-th JAFEE meeting, pp. 29-38, 2016.



Patton, Andrew J.

Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies.

Journal of Econometrics, Vol. 160, No. 1, pp. 246 - 256, 2011.

主要参考文献 III

 Takahashi, M., Y. Omori, and T. Watanabe

Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously.

Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 53, No. 6, pp. 2404-2426, 2009.

 Takahashi, M., T. Watanabe, and Y. Omori

Volatility and quantile forecasts by realized stochastic volatility models with generalized hyperbolic distribution.

International Journal of Forecasting, Vol. 32, No. 2, pp. 437-457, 2016.