

ヴァインコピュラを用いた信用リスクと市場リスクの 合算方法に関する研究

一橋大学大学院
国際企業戦略研究科
中川ゼミ

佐子 秀之

2016年3月11日

要旨

問題意識

- 銀行は、市場リスク・信用リスクなどの**リスクを合算**し、全社のリスクを計測。このとき、異なるリスク間の**依存構造をより精緻にモデル化**することが重要。
 - 先行研究の多くが t コピュラを提唱。しかし、**リスク間の依存構造の非対称性や裾依存性の違い**は十分とらえられない。
- ⇒ **リスク合算に「ヴァインコピュラ」を用いることで、この問題を解決できないか？**

研究方法

銀行の**仮想ポートフォリオ**を用いた**数値実験**

- コピュラによるリスク間依存構造のモデル化
- シミュレーションによる統合 VaR 計算 (**ヴァイン vs 5 次元 t コピュラ**)
- データ期間やポートフォリオ条件の違いによるリスク合算への影響調査

本研究の貢献

- ヴァインコピュラは、裾依存性をとらえるうえで、 t コピュラなどよりも妥当性が高いという結果が得られた。
- ⇒ **実務において、適切なリスク量合算につながる可能性が高い。**

金融機関のリスク

銀行が抱える主なリスクの種類と研究対象

- 計量化対象のリスクは主に市場リスク、信用リスク、オペレーショナルリスク。

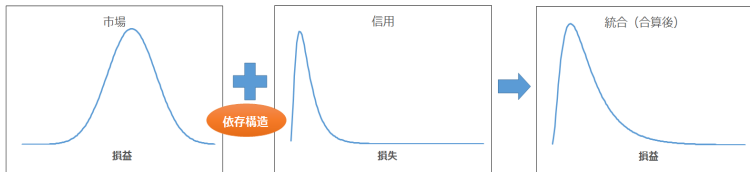
リスクタイプ	意味	計量化対象
市場 (金利・株価・為替) リスク	資産価格の変動によりポートフォリオの価値が変動するリスク。	○
信用リスク	カウンターパーティーのデフォルトや信用力の変動によりポートフォリオの価値が変動するリスク。	○
オペレーショナルリスク	不適切なシステム、人的なミスなどに起因する損失が発生するリスク。	○
流動性リスク	必要な資金が調達できないリスクや市場の流動性低下により市場価格で資産を売却できないリスク。	△

出典：Crouhy 他 (2008) ”リスクマネジメントの本質” を参考に作成

Table: 金融機関が抱える主なリスクのまとめ

リスク合算の方法

- 市場リスク、信用リスクなど個別のリスクを VaR 等で計測し、これらを合算する。
- このとき、リスク間の**依存構造**を考慮することが重要。



方法	長所	短所
総和法	<ul style="list-style-type: none"> ・単純であり、理解しやすい ・計算が簡単 	<ul style="list-style-type: none"> ・リスク間の分散効果を考慮できない。
分散共分散法	<ul style="list-style-type: none"> ・分散効果を考慮できる ・理解しやすい 	<ul style="list-style-type: none"> ・損失分布に正規分布を仮定 ・リスク間の相関の推計が難しい
コピュラ関数法	<ul style="list-style-type: none"> ・分散効果を考慮できる ・リスク間の依存関係を柔軟に表現することが可能 	<ul style="list-style-type: none"> ・パラメータ推計が難しい

出典：菅野 (2010) "金融リスク資本と統合リスク管理"を参考に作成

Table: リスク合算方法一覧

先行研究と問題意識

主な先行研究

- Tang and Valdez(2006)
保険会社におけるリスク合算。自動車、火災などの5つの分野について、保険金支払による損失の依存構造を**ガウシアンコピュラ**や**tコピュラ**などでモデル化。
- Brockmann and Kalkbrenner(2010)
ドイツ銀行におけるリスク合算。信用、市場、オペレーショナル、政策株式、不動産の5種類のリスクについて、**ガウシアンコピュラ**や**tコピュラ**でモデル化。
- 前田 (2015)
株式、債券、貸出金からなる仮想ポートフォリオについて、**3変数のヴァインコピュラ**を用いたリスクの合算。⇒ 本研究の設定はこの論文がベース。

問題意識

- 先行研究の多くがtコピュラを提唱。しかし、**リスク間の依存構造の非対称性や裾依存性の違いは十分とらえられない。**
- **ヴァインコピュラを用いることで、この問題を解決できるのではないか？**
- **ヴァインコピュラをリスク合算に適用した例はまだ少ない。**

コピュラ

コピュラとは

n 次元同時分布関数 F 、周辺分布を F_1, \dots, F_n とする。

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (1)$$

- 上式において**依存構造にあたる $C(\cdot)$ がコピュラ**という関数。
- 複数の変数間の**複雑な依存構造を表現可能**。
- 依存構造のモデル化に、**どのコピュラを選択するかが重要**。

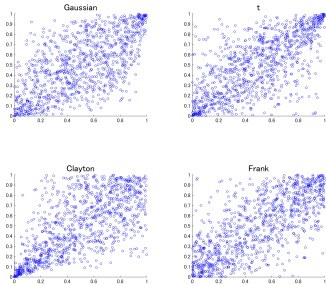


Figure: 2次元コピュラから発生させた乱数

	ガウシアン	t	ガンベル	クレイトン	フランク
依存関係の非対称性	—	—	○	○	—
下方裾依存性	—	○	—	○	—
上方裾依存性	—	○	○	—	—
パラメータ	Σ	Σ ν	α	α	α

出典：岩永 (2013) を参考に作成

t コピュラは**対称**かつ裾依存性を表すパラメータ (自由度) を **1** つしか持たない。

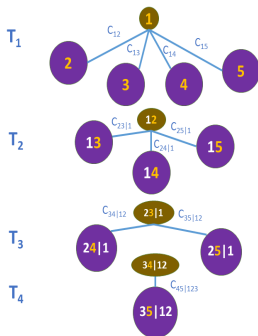
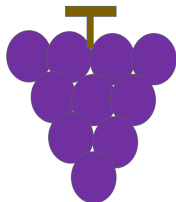
⇒ 裾が対称&全てのリスク間の裾依存性の強さが等しい。

⇒ **VaR 計測で重要な裾の依存性を適切に捉えられない**。

ヴァインコピュラ

ヴァインコピュラとは

- 複数の **2次元コピュラ** (ペアコピュラ) を階層上に組み合わせたコピュラ。全体の構造が房のように見えることからヴァインと呼ばれる。
- 多次元 t コピュラより複雑な依存関係を表現可能。
- 本研究では、**実用面からシンプルな C-ヴァインコピュラ** を選択。



数式で表すと...

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = & f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)f_5(x_5) \\
 & c_{12}\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}c_{13}\{F_2(x_2), F_3(x_3)\} \\
 & c_{14}\{F_3(x_3), F_4(x_4)\}c_{15}\{F_4(x_4), F_5(x_5)\} \\
 & c_{23|1}\{F(x_{2|1}), F(x_{3|1})\}c_{24|1}\{F(x_{2|1}), F(x_{4|1})\} \\
 & c_{25|1}\{F(x_{2|1}), F(x_{5|1})\} \\
 & c_{34|12}\{F(x_{3|12}), F(x_{4|12})\}c_{35|12}\{F(x_{3|12}), F(x_{5|12})\} \\
 & c_{45|123}\{F(x_{4|123}), F(x_{5|123})\}
 \end{aligned}$$

- 5次元同時分布を C-ヴァインコピュラを用いて表現。
- 数式で濃い青の部分が図の T_1 に、水色の部分が図の T_2 に対応している。

Figure: 左:ぶどうの例 右:5変数 C-ヴァインコピュラの例

数値実験方法

数値実験方法

- ① 銀行を想定した**仮想のポートフォリオ**を作成。
- ② 資産価格変動の**代理変数**となる**リスクファクター**を定める。
- ③ 各リスクファクターの**依存関係をコンピュータでモデル化**（ヴァインコンピュータ vs 5次元 t コピュラ）。
- ④ 各資産の**損失をモデル化**。
- ⑤ シミュレーションにより、**統合 VaR** を計算。
- ⑥ AIC により**モデルを評価**。

数値実験 Menu

- ① 複数の時期における比較（コンピュータパラメータ・統合 VaR）
- ② ポートフォリオの構成を変更した場合の比較（統合 VaR）
- ③ 頑健性の検証

数値実験方法 1

1. 仮想ポートフォリオの作成

仮想ポートフォリオは本邦大手金融機関のポートフォリオを参考に作成。

2. 資産価格変動と代理変数の対応

各資産に対し、資産価格変動の代理変数となるリスクファクターを対応させる。

資産	エクスポージャー	リスクカテゴリー	リスクファクター
貸出金	6000	信用リスク	itraxx Japan(CDS)
株式	350	市場リスク (株式)	TOPIX
日本国債	1500	市場リスク (金利)	5年日本国債利回り
米国債	750	市場リスク (金利、為替)	5年米国債利回り ドル円為替レート

Table: 仮想ポートフォリオの構成と対応するリスクファクター (単位: 億円)。

数値実験方法 2

3. 依存構造のモデル化

- 5種類のリスクファクターについて、コピュラ（ヴァイン vs 5次元 t コピュラ）でモデル化を行う。

4. 各資産の損失のモデル化

- 信用リスクの損失分布は、Vasicek のローンポートフォリオ損失分布を用いる。
- 市場リスクの損失分布は、スキュー t 分布を用いる。

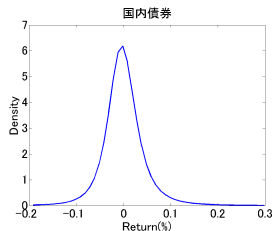
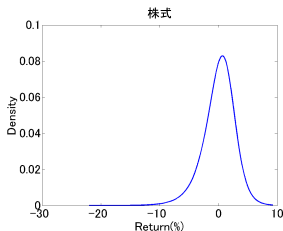
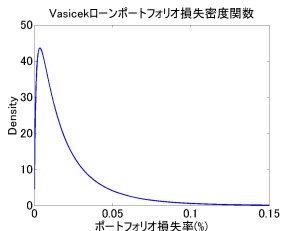


Figure: 各資産の損失分布の例

コンピュータパラメータの推計結果

通期 (2005年4月から2015年3月) のパラメータ推計結果

- ヴァインコンピュータは、FX-JGBを除き、 t コンピュータが選択された。
- 第一階層における自由度は、TOPIX-FXが3.819と小さく、TOPIX-TNoteは7.177と大きい \Rightarrow ペアによる裾依存度の違いを表現できている^a。

^a自由度は小さいほど裾依存性が強い

階層	ペア	param1	標準誤差	自由度	標準誤差	コンピュータ	ペア	パラメータ
第一階層	TOPIX-CDS	0.478	0.015	3.819	0.046	t	TOPIX-CDS	-0.563
	TOPIX-FX	-0.575	0.006	6.889	0.033	t	TOPIX-FX	0.499
	TOPIX-Tnote	0.299	0.012	7.177	0.083	t	TOPIX-Tnote	0.303
	TOPIX-JGB	0.369	0.007	6.644	0.078	t	TOPIX-JGB	0.360
第二階層	CDS-FX	-0.091	1.242	10.500	2.095	t	CDS-FX	-0.348
	CDS-Tnote	0.373	0.279	5.458	7.095	t	CDS-Tnote	-0.314
	CDS-JGB	0.147	0.693	9.002	3.627	t	CDS-JGB	-0.229
第三階層	FX-Tnote	-0.160	0.021	9.228	0.602	t	FX-Tnote	0.456
	FX-JGB	0.029	0.051	-	-	反転クレイトン	FX-JGB	0.290
第四階層	Tnote-JGB	-0.225	0.021	11.015	0.051	t	Tnote-JGB	0.340
param1: 相関・生成パラメータ (コンピュータによる)							自由度	6.302

Table: 通期 左: ヴァインコンピュータ 右: 5次元 t コンピュータのパラメータ推計結果。

* ヴァインコンピュータの構造は、順位相関であるケンドールのタウを用いて決定した。ペアのコンピュータは各階層の AIC が最大になるよう決定した。

ストレス時期のパラメータの推計結果

ストレス時期 (2008年1月から2009年3月) のパラメータ推計結果

- 通期と異なり、ガウシアンコピュラやフランクコピュラといった**裾依存性が無いコピュラが多く選択された。**

⇒ ヴァインコピュラであれば、裾依存性の強弱が混在する依存構造を表現可能。

階層	ペア	param1	標準誤差	自由度	標準誤差	コピュラ	ペア	パラメータ
第一階層	TOPIX-CDS	-0.751	0.268	-	-	ガウシアン	TOPIX-CDS	-0.740
	TOPIX-FX	0.682	0.191	4.990	0.785	t	TOPIX-FX	0.692
	TOPIX-Tnote	2.721	0.333	-	-	フランク	TOPIX-Tnote	0.412
	TOPIX-JGB	2.851	0.217	-	-	フランク	TOPIX-JGB	0.421
第二階層	CDS-FX	-0.111	0.053	-	-	ガウシアン	CDS-FX	-0.562
	CDS-Tnote	-1.492	0.221	-	-	フランク	CDS-Tnote	-0.457
	CDS-JGB	-0.133	0.071	-	-	ガウシアン	CDS-JGB	-0.389
第三階層	FX-Tnote	0.308	0.058	3.869	0.695	t	FX-Tnote	0.475
	FX-JGB	0.227	0.125	-	-	ガウシアン	FX-JGB	0.426
第四階層	Tnote-JGB	1.092	0.058	-	0.125	グンベル	Tnote-JGB	0.364
param1: 相関・生成パラメータ (コピュラによる)							自由度	10.392

Table: ストレス時期 左: ヴァインコピュラ 右: 5次元tコピュラのパラメータ推計結果。

統合 VaR 計算結果比較とモデル評価

統合 VaR 比較とモデル評価

- 通期は自由度 3 の t コピュラ^a、ストレス時期は、信頼水準 99.0 % でヴァインコピュラの統合 VaR が最大。
- 通期、ストレス時期ともにヴァインコピュラがモデルの当てはまりが最も良い。

^a 裾依存性が強い場合、保守的なリスク計測方法として用いられる。

コピュラ	通期		ストレス	
	99.0	99.9	99.0	99.9
信頼水準	99.0	99.9	99.0	99.9
単純合算	1240.6	2112.3	1240.6	2112.3
ガウシアン	866.7	1403.9	913.6	1489.5
t	873.8	1460.8	913.7	1523.7
ヴァイン	875.4	1452.4	927.8	1537.3
t($\nu = 3$)	884.6	1497.8	924.0	1546.1

	通期		ストレス	
	AIC	LL	AIC	LL
ガウシアン	-2741.6	1380.8	-569.9	294.9
t	-3165.5	1593.8	-592.4	307.2
ヴァイン	-3190.2	1614.1	-619.9	322.0

Table: 左：統合 VaR 計算結果（単位：億円） 右：AIC と対数尤度

Value at Risk (VaR)

- 代表的なリスクの尺度の 1 つ。ある期間後に、ある一定確率で発生することが想定される最大損失額。

ポートフォリオのウェイトを変更した場合の分析

ストレス時期 ポートフォリオのウェイトを変更した場合の統合 VaR

- 自由度 3 の t コピュラが必ずしも最大の統合 VaR とはならない。
 - 国内債券のエクスポージャーを 2 倍にした場合、信頼水準 99.0 %、99.9 % とともにヴァインコピュラの統合 VaR が最大。
- ⇒ 自由度 3 の t コピュラは分散効果を過大に評価している可能性がある。
- ⇒ t コピュラではとらえられないリスクを、ヴァインコピュラならばとらえることが可能であることを示唆。

		標準		信用 1.2 倍		株式 2 倍		国内債券 2 倍		海外債券 2 倍	
信頼水準		99.0	99.9	99.0	99.9	99.0	99.9	99.0	99.9	99.0	99.9
VaR	単純合算	1240.6	2112.3	1384.9	2352.2	1440.5	2446.9	1321.9	2309.0	1478.3	2493.4
	ガウシアン	913.6	1489.5	1054.2	1723.8	1084.1	1763.0	896.3	1471.1	991.8	1609.3
	t	913.7	1523.7	1053.8	1756.6	1083.8	1801.4	893.1	1483.0	992.9	1652.7
	ヴァイン	927.8	1537.3	1069.0	1768.7	1098.7	1815.5	914.4	1523.5	1017.2	1681.0
	$t(\nu = 3)$	924.0	1546.1	1064.1	1780.3	1100.2	1839.9	903.7	1508.6	1007.7	1699.5

Table: ストレス時期 ポートフォリオのウェイトをした場合の分析

頑健性の検証

2 期間の比較

- 観測期間を 5 年として、6ヶ月ずつ期間を変えながらパラメータ推定を実施。
- TOPIX が第一階層の中心で、CDS と FX が続く構造。また、第一、第二階層で t コピュラが多く選択される。
- データが変化しても **ヴァインコピュラの構造やパラメータに極端な変化は無い。**

2006/10~2011/12				2008/04~2013/06			
ペア	コピュラ	param1	param2	ペア	コピュラ	param1	param2
TOPIX-FX	t	0.518	3.875	TOPIX-CDS	t	-0.673	8.470
TOPIX-CDS	t	-0.650	7.492	TOPIX-FX	t	0.524	4.362
TOPIX-Tnote	t	0.375	7.354	TOPIX-Tnote	t	0.353	8.403
TOPIX-JGB	t	0.429	5.421	TOPIX-JGB	t	0.361	5.060
FX-CDS	t	-0.111	8.751	CDS-FX	t	-0.049	7.624
FX-Tnote	t	0.413	5.016	CDS-Tnote	t	-0.174	8.444
FX-JGB	ガウシアン	0.217	-	CDS-JGB	フランク	-0.455	-
CDS-Tnote	フランク	-1.261	-	FX-Tnote	t	0.321	4.752
CDS-JGB	反転クレイトン	0.045	-	FX-JGB	t	0.170	12.389
TNote-JGB	t	-0.193	12.618	TNote-JGB	t	0.230	5.700

Table: 代表的な 2 期間の比較 (10 期間中)。

*上から 1 列目から 4 列目までのペアが第一階層、5 列目から 7 列目までが第二階層、8 列目、9 列目までが第三階層、10 列目のペアが第四階層。

結論・考察

主な結果

- リスクファクターのペアにより異なるコピュラが選択され、裾依存性もペアにより異なる。
- ヴァインコピュラによる統合 VaR は自由度 3 の t コピュラによる統合 VaR を上回る場合がある。
- 観測期間が変わっても、ヴァインコピュラの構造やパラメータは大きく変化しない。

結論・考察

リスク間の依存関係のモデル化にヴァインコピュラを用いることにより

- 裾依存性の強弱、非対称性などの依存構造を捉えることができる。
- リスク間の裾依存性を適切にとらえた上でリスク合算が可能であることが示唆される。
- モデルは複雑になるが、データの変化に対し頑健性が認められる。

⇒ ヴァインコピュラは、裾依存性をとらえる上で、 t コピュラより妥当性が高く、適切な統合リスク量計測につながる可能性が高い。