

Particle Learning を用いた CDS スプレッド分析 ～Hazard Rate・SV Model～

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科
金融戦略・経営財務コース
鶴田 大

2014 年 3 月 13 日

研究背景

- CDS スプレッドについて、信用リスクの分析における誘導型モデルの枠組みを用い、インプライされているハザードレートの推定とその確率過程のパラメータ推定が可能。
- この枠組みで、ハザードレートを潜在変数とした非線形状態空間モデルが記述でき、フィルタリングによる状態推定が可能。
- 信用リスクの分析における誘導型モデルの応用としては、CDS の裁定取引戦略や CDS のリスクプレミアムに関する分析などが挙げられる。
- 本論文では、推定に粒子フィルタの一種である Carvalho et al.(2010) の Particle Learning を拡張し、用いる方法を示す。
- また、推定方法を応用し、ハザードレートの確率過程に確率ボラティリティモデルを用いた推定も行い、日本企業の CDS 1 銘柄を例にハザードレートとそのボラティリティの関係に言及する。

先行研究

- CDS の誘導型モデルによるハザードレートの推定
 - Zhang(2008)
CDS に織り込まれたリスクプレミアムに関する研究で, Extended Kalman Filter を使用.
 - Jarrow et al.(2011)
CDS を用いた裁定取引戦略に関する研究で, Unscented Kalman Filter を使用.
- ファイナンスにおける粒子フィルタを用いた状態推定
 - Takahashi and Sato(2001)
金利モデルの状態推定で モンテカルロフィルタを用いる推定方法を提案した.
 - 三崎 (2011)
誘導型モデル用いた社債のハザードレートの推定で, Takahashi and Sato(2001) を拡張し適用している.
- パラメータの逐次的な推定を行う粒子フィルタ
 - Storvik(2002)
パラメータについて, 事後分布の十分統計量を伝播. 状態の伝播の方法は, Propagate Step-Resampling Step の順.
 - Liu and West(2001)
多変量正規分布でパラメータの分布のカーネル近似を行い, その十分統計量を伝播. 状態の伝播の方法は, Resampling Step- Propagate Step で補助粒子フィルタによる.
 - Carvalho et al(2010)
パラメータの事後分布の十分統計量を伝播. 状態の伝播の方法を Resampling Step-Propagate Step とし, 完全適合なフィルタリング.

CDS の誘導型モデル

■ CDS スプレッド

- 誘導型モデルの枠組みで, Jarrow et al.(2011) をベースに次のように近似的に表現.

$$S_t^T \approx \frac{(1-R) \sum_{k=1}^{12T} P(t, t + \frac{k}{12}) E^Q \left[\lambda_{t+k/12} \exp \left(- \int_t^{t+k/12} \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]}{3 \sum_{k=1}^{4T} P(t, t + \frac{k}{4}) E^Q \left[\exp \left(- \int_t^{t+k/4} \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]} \quad (1)$$

- 経過プレミアムを支払は考慮せず, 分子 (Default leg) の積分を 1 カ月ごとに離散近似. 金利と回収率は所与.
- S_t^T : 時刻 t の満期 $t+T$ の CDS スプレッド. λ_t : 時刻 t のハザードレート. R : 額面に対する回収率. $P(t, t + \Delta t)$: 時点 t の期間 Δt のディスカウントファクター.
- プレミアムの支払いは, 四半期ごと.
- 期待値計算については, 次項参照. 確率空間の設定は, APPENDIX 参照.

■ ハザードレート

- リスク中立確率測度下で CIR 過程に従うとし, リスクの市場価格は 0 と仮定.

$$d\lambda_t = k(\bar{\lambda} - \lambda_t)dt + \sigma \sqrt{\lambda_t} dw^Q(t) \quad (2)$$

- 以降, ハザードレートが CIR 過程に従う場合をシングルファクターモデルとする.

- (1) を観測方程式, (2) を状態方程式とする状態空間モデルとなる.

CDS スプレッド (1) における期待値計算

■ CDS スプレッド (1) における期待値計算

- 分母・分子にあるリスク中立確率測度下での期待値計算については、次の X と Y について考えればよい。

$$X(s, \lambda_t) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^{t+s} \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], Y(s, \lambda_t) = E^Q \left[\lambda_{t+s} \exp \left(- \int_t^{t+s} \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

- 解の形は次のように推測できる。

$$X(s, \lambda) = \exp(-A(s) - B(s)\lambda), Y(s, \lambda) = (C(s) + D(s)\lambda) \exp(-A(s) - B(s)\lambda)$$

- ファインマンカットツの定理から導かれる *ODE* を解くことで A, B, C, D は以下のように解析的に導出できる。

$$A = \frac{k\bar{\lambda}}{\sigma^2} \left[2 \log \left\{ \frac{(\xi + k)e^{\xi s} + (\xi - k)}{2\xi} \right\} - (\xi + k)s \right], \quad B = \frac{1}{\sigma^2} \frac{e^{\xi s} - 1}{\frac{e^{\xi s}}{\xi - k} + \frac{1}{\xi + k}}$$

$$C = \frac{2k\bar{\lambda}}{\xi + k} - \frac{4\xi k\bar{\lambda}}{\left\{ (\xi + k)e^{\xi t} + (\xi - k) \right\} (\xi + k)}, \quad D = e^{\xi s} \left\{ \frac{(\xi + k)e^{\xi s} + (\xi - k)}{2\xi} \right\}^{-2}$$

$$\xi := \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

- 観測方程式はハザードレートとパラメータの複雑な非線形関数となる。

Particle Learning-1

■ フィルタリング

- CDS スプレッドにインプライされているハザードレートとその確率過程のパラメータの推定のため, Carvalho et al.(2010) によって提案された粒子フィルタの一種である Particle Learning を拡張し用いる.

■ Particle Learning の特徴

- パラメータに共役な事前・事後分布を設定. 事後分布を十分統計量で記述できるようにし, 効率的なサンプリングを可能としている.
- Resampling Step-Propagate Step の順によるフィルタリングで, 提案分布を用いない完全適合なフィルタリング (Pitt and Shephard(1999)) によりパーティクル近似の退化を防ぐフィルタリング.

■ 状態空間モデル

- Particle Learning の拡張の説明のため, 一般に次のように仮定する.

$$y_{t+1} \sim p(y_{t+1}|x_{t+1}, \theta)$$

$$x_{t+1} \sim p(x_{t+1}|x_t, \theta)$$

- x_t : 状態変数. y_t : 観測変数. θ : パラメータ.
- $s_t = S(s_{t-1}, x_t, y_t)$: パラメータの事後分布の十分統計量. $z_t := (x_t, s_t, \theta)$. $y^t := (y_1, \dots, y_t)$.

Particle Learning-2

- いま, $p(z_t|y^t)$ の粒子近似を持っているとする. なお, 粒子近似は次のように表される.

$$p(z_t|y^t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{z_t^{(i)}}$$

- $\delta_{z_t^{(i)}}$ はデルタ関数.
- Particle Learning では, モンテカルロ積分の考えをもとに, 以下の式に基づき, フィルタリングとパラメータの学習を行い, $p(z_t|y^t)$ の粒子を $p(z_{t+1}|y^{t+1})$ の粒子に更新する.

$$p(z_t|y^{t+1}) \approx \sum_{i=1}^N \frac{p(y_{t+1}|z_t^{(i)})}{\sum_{l=1}^N p(y_{t+1}|z_t^{(l)})} \delta_{z_t^{(i)}} \quad (\text{Resampling}) \quad (3)$$

$$p(z_{t+1}|y^{t+1}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(\theta|s_{t+1}) p(s_{t+1}|x_{t+1}, s_t^{(i)}, y^{t+1}) p(x_{t+1}|z_t^{(i)}, y^{t+1}) \quad (\text{Propagate}) \quad (4)$$

Particle Learning-3

- (3),(4) 式に基づき, Particle Learning は次のアルゴリズムとなる.

Particle Learning のアルゴリズム

- 1 Resample Step $\{\tilde{z}_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ from $z_t^{(i)} = (x_t, s_t, \theta)^{(i)}$ with weight $w_{t+1}^{(i)} \propto p(y_{t+1}|z_t^{(i)})$
- 2 Propagate Step $\tilde{x}_t^{(i)}$ to $x_{t+1}^{(i)}$ via $p(x_{t+1}|\tilde{z}_t^{(i)}, y_{t+1})$
- 3 Propagate Step $s_{t+1}^{(i)} = S(\tilde{s}_t^{(i)}, x_{t+1}^{(i)}, y_{t+1})$
- 4 Parameter Sampling $\theta^{(i)}$ from $p(\theta|s_{t+1}^{(i)})$

- CDS のフィルタリングについては, 観測方程式の非線形性の複雑さから $p(y_{t+1}|z_t^{(i)})$, $p(x_{t+1}|z_t^{(i)}, y_{t+1})$ の評価, および十分統計量の設定ができない.
- 本論文では, この問題点を解決する.

Particle Learning の拡張-フィルタリング-

- Resampling Step(3) について、以下が導出できる。

Resampling Step(3)

- $p(y_{t+1}|z_t^{(i)})$ について、モンテカルロ積分を用いると次が成立。

$$p(y_{t+1}|z_t^{(i)}) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(y_{t+1}|x_{t+1}^{(k)}, z_t^{(i)})$$

- $x_{t+1}^{(k)}$ は、 $p(x_{t+1}|z_t^{(i)})$ の粒子近似の 1 つの粒子である。
- 各 i に対し、 $p(y_{t+1}|z_t^{(i)})$ を評価するには、 $p(x_{t+1}|z_t^{(i)})$ から十分大きい数だけ $x_{t+1}^{(k)}$ をサンプリングし、各サンプルに対し尤度 $p(y_{t+1}|x_{t+1}^{(k)})$ を計算し平均すればよい。
- $x_{t+1} \sim p(x_{t+1}|x_t, \theta)$ がサンプリングできることと、 $y_{t+1} \sim p(y_{t+1}|x_{t+1}, \theta)$ が評価できることが必要条件となる。

Particle Learning の拡張-フィルタリング-

- Propagate Step(4) について、以下が導出できる。

Propagate Step(4)

- $p(x_{t+1}|z_t^{(i)}, y^{t+1})$ について、モンテカルロ積分を用いると次が成立。

$$p(x_{t+1}|z_t^{(i)}, y^{t+1}) \approx \sum_{k=1}^N \frac{p(y_{t+1}|x_{t+1}^{(k)})}{\sum_{l=1}^N p(y_{t+1}|x_{t+1}^{(l)})} \delta_{x_{t+1}^{(k)}}$$

- $x_{t+1}^{(k)}$ は、 $p(x_{t+1}|z_t^{(i)})$ のパーティクル近似の 1 つの粒子である。
 - $p(x_{t+1}|z_t^{(i)}, y^{t+1})$ から 1 つのサンプリングを得るには、 $p(x_{t+1}|z_t^{(i)})$ から十分大きい数だけ $x_{t+1}^{(k)}$ をサンプリングし、尤度 $p(y_{t+1}|x_{t+1}^{(k)})$ に比例する確率をもつ多項分布から 1 つだけサンプリングすればよい。
 - 同様に、 $x_{t+1} \sim p(x_{t+1}|x_t, \theta)$ がサンプリングできることと、 $y_{t+1} \sim p(y_{t+1}|x_{t+1}, \theta)$ が評価できることが必要条件となる。
- 2重のモンテカルロ積分を用いることで、提案分布を用いず完全適合なままのフィルタリングとなる。

Particle Learning の拡張-パラメータ推定

- パラメータについては, $p(\theta|x^{t+1}, y^{t+1})(= p(\theta|s_{t+1})p(s_{t+1}|x_{t+1}, s_t^{(i)}, y^{t+1}))$ を考えなければならぬ。

- 状態空間モデルをオイラー近似し, 整理すると次の通り。

$$CDS_t^T = S_t^T(\lambda_t; \theta) + \varepsilon_t \quad (\text{観測方程式})$$

$$\lambda_t = \beta_0 + \beta_1 \lambda_{t-1} + \sigma \sqrt{\lambda_{t-1}} w_t \quad (\text{状態方程式})$$

$$(\beta_0 = k\bar{\lambda}\Delta t, \beta_1 = 1 - k\Delta t, \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \eta^2), w_t \sim N(\mathbf{0}, \Delta t)) \quad (5)$$

- パラメータ: $\beta_0, \beta_1, \sigma, \eta$ (以降 $\psi = \{\beta_0, \beta_1, \sigma\}$). $\beta_0 := k\bar{\lambda}\Delta t$. $\beta_1 := 1 - k\Delta t$.
- パラメータの十分統計量の表記 (次項) には, x_t, y_t の代わりに (5) の表記を用いる。
- 観測方程式と状態方程式共にパラメータが依存. 依存性により共役な分布を設定できない。

Particle Learning の拡張-パラメータ推定

■ **パラメータは、提案分布からのサンプリングとし、提案分布の十分統計量を伝播。**

■ ψ については、状態方程式の尤度のみを用いた事後分布を提案分布とする。

■ 事前分布を正規分布-ガンマ分布とし、以下のように設定する。

$$(\beta_0, \beta_1)^T | \sigma, \lambda^t \sim N(b_t, \sigma^2 B_t \Delta t), \quad \sigma^{-2} | \lambda^t \sim \text{Gamma}(v_t, d_t)$$

■ CIR 過程を仮定したことに注意すると、事後分布の十分統計量は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= \lambda_t \hat{B}_{t+1}, \quad b_{t+1} = \lambda_{t+1} \hat{B}_{t+1} \hat{\lambda}_t + \lambda_t \hat{B}_{t+1} B_t^{-1} b_t \\ v_{t+1} &= v_t + 0.5, \quad d_{t+1} = \frac{2\lambda_t \Delta t}{\lambda_t b_t^T B_t^{-1} b_t - b_{t+1}^T \hat{B}_{t+1}^{-1} b_{t+1} + \lambda_{t+1}^2 + \frac{2\lambda_t \Delta t}{d_t}} \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \hat{\lambda}_t = (1, \lambda_t)^T, \quad \hat{B}_{t+1}^{-1} := \hat{\lambda}_t \hat{\lambda}_t^T + \lambda_t B_t^{-1}$$

■ η_t については、1 期前の他のパラメータを用いて、提案分布を導出。

■ 事前分布をガンマ分布とし、以下のように設定する。

$$\eta^{-2} \sim \text{Gamma}(r_t, s_t)$$

■ 事後分布の十分統計量は、 η_t 以外のパラメータについて $t-1$ 時点のものを所与として、他の t 時点のパラメータとは独立に事後分布を導出する。

$$r_{t+1} = r_t + 0.5, \quad s_{t+1} = \frac{1}{1/s_t + (\text{CDS}_{t+1}^T - S_{t+1}^T(\lambda_{t+1}; \psi))^2 / 2} \quad (6)$$

■ 本来、 t 時点のパラメータの同時分布からのサンプリングを行わなければならないので、提案分布からのサンプリングとなる。

Particle Learning の拡張-パラメータ推定

- $p(\theta|x^{t+1}, y^{t+1})$ について, モンテカルロ積分を用い, 次が成立.

$$p(\psi, \eta|x^{t+1}, y^{t+1}) \approx \frac{K_1}{K_0} \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=0}^t p(y_{i+1}|\psi^{(j)}, \eta^{(j)}, x_{i+1})}{q(\eta^{(j)})} \delta_{\psi^{(j)}, \eta^{(j)}}$$

- $\psi^{(j)}, \eta^{(j)}$ は, 提案分布からサンプリング.
 - K_0, K_1 は, $p(\psi, \eta|x^{t+1}, y^{t+1})$ と $p(\psi|x^{t+1})$ の規定化定数.
 - $q(\eta^{(j)})$ は, η の提案分布の確率密度関数.
-
- 各粒子に対し, 提案分布から十分大きい数だけパラメータをサンプリングし, $\prod_{i=0}^t p(y_{i+1}|\psi^{(j)}, \eta^{(j)}, x_{i+1})/q(\eta^{(j)})$ のウェイトでリサンプリングすればよい.
(Sampling Importance Resampling)

確率ボラティリティモデル (SV モデル) の導入

- ハザードレートが, リスク中立確率測度下で確率ボラティリティ過程に従うとする.
- オイラー近似を行うと状態空間モデルは次の通りとなる.

$$CDS_t^T = S_t^T(\lambda_t; \theta) + \varepsilon_t$$

$$\lambda_t = \beta_0 + \beta_1 \lambda_{t-1} + \sqrt{v_{t-1}} w_{1,t}$$

$$v_t = \beta_2 + \beta_3 v_{t-1} + \sigma \sqrt{v_{t-1}} (\rho w_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} w_{2,t})$$

$$(\beta_0 = k_1 \bar{\lambda} \Delta t, \beta_1 = 1 - k_1 \Delta t, \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \eta^2), w_{1,t} \sim N(\mathbf{0}, \Delta t),$$

$$\beta_2 = k_2 \bar{v} \Delta t, \beta_3 = 1 - k_2 \Delta t, w_{2,t} \sim N(\mathbf{0}, \Delta t))$$

- $w_{1,t}, w_{2,t}$ は互いに独立とし, ρ は, ハザードレートとそのボラティリティのノイズの相関.
- リスクの市場価格は 0 とする.
- (1) の期待値計算については, **ODE** の数値計算が必要.
- **状態の Resampling Step, Propagate Step は, 先に示した方法で行うことができる.**

SV モデルの CDS スプレッド (1) における期待値計算

■ SV モデルの CDS スプレッド (1) における期待値計算

- 分母・分子にあるリスク中立確率測度下での期待値計算については、次の X と Y について考えればよい。ただし、 $h_t = (\lambda_t, v_t)^T$ 。

$$X(s, h_t) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^{t+s} \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], Y(s, h_t) = E^Q \left[\lambda_{t+s} \exp \left(- \int_t^{t+s} \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

- 解の形は次のように推測できる。ただし、 $A(s), C(s)$ は、スカラー、 $B(s), D(s)$ は、2次元のベクトルである。

$$X(s, h) = \exp(-A(s) - B^T(s)h), Y(s, h) = (C(s) + D^T(s)h) \exp(-A(s) - B^T(s)h)$$

- ファインマンカットツの定理から次の ODE が導出できる。

$$\dot{A} = B^T K \theta$$

$$\dot{B} = -KB - \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \{ (b_1 + b_2 \rho \sigma)^2 + b_2^2 (1 - \rho^2) \sigma^2 \} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$\dot{C} = D^T K \theta$$

$$\dot{D} = -KD - \left(\begin{array}{c} 0 \\ (b_1 d_1 + b_2 d_1 \rho \sigma + b_1 d_2 \rho \sigma + b_2 d_2 (\rho \sigma)^2) + b_2 d_2 (1 - \rho^2) \sigma^2 \end{array} \right)$$

$$\bar{\theta} := \left(\begin{array}{c} \bar{\lambda} \\ \bar{v} \end{array} \right), K := \left[\begin{array}{cc} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{array} \right], B := \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right), D := \left(\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right)$$

なお、初期条件は、 $A(0) = 0, B(0) = (0, 0)^T, C(0) = 0, D(0) = (1, 0)^T$ である。

- Lunge Kutta 法により数値的に解くことで解が得られる。

SV モデル-パラメータ推定

- パラメータのサンプリングのため、状態方程式を以下の通り変換。

$$Y = X\tilde{B} + \sqrt{v_t}(u_t, \eta_t)$$

$$Y := (\lambda_t, v_t), X := (\mathbf{1}, \lambda_{t-1}, v_{t-1}), \tilde{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_2 \\ \beta_1 & \tilde{\beta}_5 \\ \tilde{\beta}_4 & \beta_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_{1,t} \\ \sigma\rho w_{1,t} + \sigma\sqrt{1-\rho^2}w_{2,t} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\Sigma}\right), \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} c^2 & \rho c\sigma \\ \rho c\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

- シングルファクターモデルと同様に、提案分布からのサンプリングとし、提案分布の十分統計量を伝播していく。
 - $\tilde{\Sigma}$ の (1,1) 要素, \tilde{B} の (3,1) 要素および (2,2) 要素は本来パラメータがないが、共役な事後分布の導出のため、パラメータを設定している。

SV モデル-パラメータ推定

- $\tilde{\beta}|\tilde{\Sigma}$ の事前分布を多変量正規分布, $\tilde{\Sigma}$ の事前分布を逆ウィシャート分布とする.

$$\tilde{\beta}|\tilde{\Sigma}, \lambda^t, \mathbf{v}^t \sim N(\bar{\beta}_t, \Delta t \cdot \tilde{\Sigma} \otimes A_t^{-1})$$

$$\tilde{\Sigma}|\lambda^t, \mathbf{v}^t \sim IW(d_t, W_t)$$

$$p(\lambda_{t+1}, \mathbf{v}_{t+1}|\tilde{\beta}, \tilde{\Sigma}, \lambda^t, \mathbf{v}^t) \propto |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \text{etr} \left(-\frac{1}{2\mathbf{v}_t \Delta t} (Y - X\tilde{B})^T (Y - X\tilde{B}) \tilde{\Sigma}^{-1} \right)$$

$$\tilde{\beta} := \text{vec}(\tilde{B})$$

- 事後分布は, 次の通りとなる.

$$\tilde{\Sigma}|\lambda^{t+1}, \mathbf{v}^{t+1} \sim IW(d_t + 1, W_t + \frac{S_{t+1}}{\Delta t})$$

$$\tilde{\beta}|\tilde{\Sigma}, \lambda^{t+1}, \mathbf{v}^{t+1} \sim N \left(\bar{\beta}_{t+1}, \Delta t \cdot \tilde{\Sigma} \otimes \left(\frac{X^T X}{\mathbf{v}_t} + A_t \right)^{-1} \right)$$

$$\bar{B}_{t+1} := \left(\frac{X^T X}{\mathbf{v}_t} + A_t \right)^{-1} \left(\frac{X^T Y}{\mathbf{v}_t} + A_t \bar{B}_t \right)$$

$$S_{t+1} := \frac{1}{\mathbf{v}_t} (Y - X\bar{B}_{t+1})^T (Y - X\bar{B}_{t+1}) + (\bar{B}_t - \bar{B}_{t+1})^T A_t (\bar{B}_t - \bar{B}_{t+1})$$

SV モデル-パラメータ推定

- $p(\theta|x^{t+1}, y^{t+1})$ について, モンテカルロ積分を用い, 次が成立.

$$p(\psi, \eta|x^{t+1}, y^{t+1}) \approx \frac{1}{K_0} \sum_{j=1}^N w^{(j)} \delta_{\psi^{(j)}, \eta^{(j)}}$$

ただし,

$$w^{(j)} = \frac{\prod_{i=0}^t p(y_{i+1}|\psi^{(j)}, \eta^{(j)}, x_{i+1}) \prod_{i=1}^t p(x_{i+1}|\psi^{(j)}, x_i) p(x_1|\psi^{(j)}) p(\psi^{(j)}) p(\eta^{(j)})}{q(\eta^{(j)}) q(\psi^{(j)}|x^{t+1})}$$

- $\psi := \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \rho, \sigma\}$, $\phi := \{\tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, c\}$. x_t : 状態変数. y_t : 観測変数.
 - $\psi^{(j)}, \eta^{(j)}$ は, 提案分布からサンプリング.
 - $q(\psi|x^{t+1})$ は, ψ, ϕ の提案分布 $q(\psi, \phi|x^{t+1})$ に関する ψ の周辺分布の確率密度関数.
 - $q(\eta^{(j)})$ は, η の提案分布の確率密度関数. K_0 は, $p(\psi, \eta|x^{t+1}, y^{t+1})$ の規定化定数.
- 各粒子に対し, 提案分布から十分大きい数だけパラメータをサンプリングし, $w^{(j)}$ のウェイトでリサンプリングすればよい.
 - ただし, $p(\psi, \phi), q(\psi, \phi|x^{t+1})$ が多変量正規分布と逆ウィシャート分布の積であり, ψ の周辺分布を解析的に評価することができないため, $p(\psi, \phi), q(\psi, \phi|x^{t+1})$ について多変量正規分布で近似を行い評価する.

データ

- Bloomberg から取得したソニーの 5 年物 CDS スプレッドの 2008 年 1 月 9 日から 2013 年 6 月 28 日までの週次データを用いる.
- 回収率は, 0.35 とした.
- 推計にあたり, 用いたソフトは Matlab. 各時点の推定において CDS スプレッドの理論値の計算及びパラメータのサンプリングの際に, Parallel Computing Toolbox による並列計算を用いた. 並列数はソフトの制約上, 12 個とした.
- 粒子数は, 各モンテカルロ積分について, シングルファクターモデルで 1000 個, SV モデルで 500 個とした.

パラメータの推定結果

- パラメータの推定結果は次の通り。
- Jarrow et al.(2011) の米国企業での先行研究と比較し、大きなかい離はない。

Table : 全期間により推定されたパラメータの推定値と信用区間。 k と $\bar{\lambda}, \bar{v}$, については, 推定された $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ の推定値から算出。

	single		SV	
	平均	95%信用区間	平均	95%信用区間
η	1.571×10^{-4}	$[1.219 \times 10^{-4} \ 1.957 \times 10^{-4}]$	1.184×10^{-4}	$[0.995 \times 10^{-4} \ 1.354 \times 10^{-4}]$
σ	0.2166	[0.1921 0.2374]		
β_0	6.811×10^{-5}	$[4.602 \times 10^{-5} \ 8.408 \times 10^{-5}]$	1.356×10^{-4}	$[1.323 \times 10^{-4} \ 1.394 \times 10^{-4}]$
β_1	0.9970	[0.9964 0.9989]	0.9980	[0.9977 0.9984]
k_1	0.1529	[0.0574 0.1813]	0.104	[0.081 0.118]
$\bar{\lambda}$	0.0240	[0.0180 0.0443]	0.0679	[0.0594 0.0875]
c			1.001	[0.947 1.077]
ρ			0.657	[0.570 0.732]
σ			0.144	[0.133 0.157]
β_2			3.796×10^{-5}	$[3.763 \times 10^{-5} \ 3.829 \times 10^{-5}]$
β_3			0.9994	[0.9986 0.9999]
k_2			0.0318	[0.0037 0.0741]
\bar{v}			0.404	[0.027 0.561]
β_4			-0.002	[-0.009 0.004]
β_5			-0.281×10^{-5}	$[-2.457 \times 10^{-5} \ 1.929 \times 10^{-5}]$

SV モデルで推定されたパラメータ

- メモリや計算時間の制約で粒子数が少ないため、事前分布の範囲を絞り推定。
- 概ね収束していると考えられる。

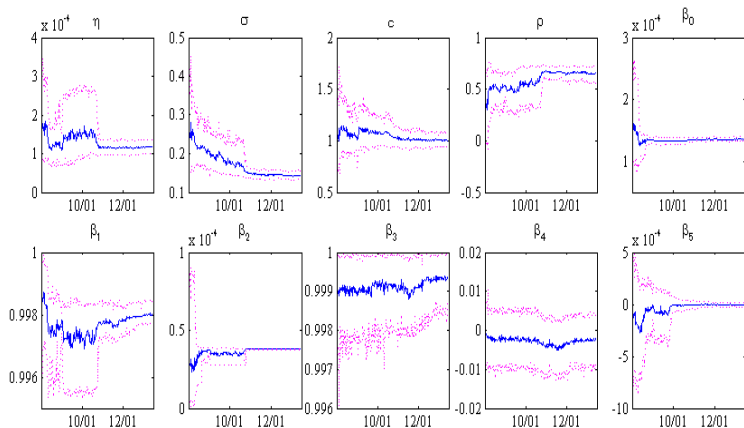


Figure: 推定されたパラメータ. 実線が平均値. 点線が 95%信用区間

CDS スプレッドの理論値と推定誤差/ハザードレートとボラティリティ

- ハザードレートが上昇するときにボラティリティが高くなり、ハザードレートが低下する時は、ボラティリティが低下する傾向が確認される。

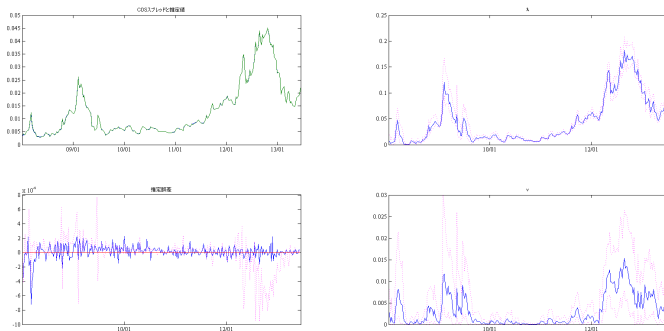


Figure: CDS スプレッドの理論値と推定誤差/ハザードレートとボラティリティ. 左上図が CDS スプレッドと SV モデルにより推定された理論値. 左下図が理論値と観測値間の推定誤差. 実線が SV モデル. 点線がシングルファクターモデル. 右上図が SV モデルによるハザードレート. SV モデルによる右下図がボラティリティ. 実線が平均値. 点線が 95%信用区間.

まとめ

- 本論文では、信用リスクの分析における誘導型モデルの枠組みの中で、CDS スプレッドにインプライドされているハザードレートの推定とその確率過程のパラメータ推定を、Carvalho et al. (2010) によって提案された粒子フィルタの一種である Particle Learning を用いて行う方法を示した。
 - この考え方は、Carvalho et al. (2010) の Particle Learning を完全適合なまま拡張するもので、提案された考え方は他の非線形性の強い状態空間モデルについても Particle Learning の応用を可能とするものである。
- CDS スプレッドの分析において、潜在変数であるハザードレートについて、CIR 過程と確率ボラティリティモデルとする場合のモデル設定を行い、それぞれにおいて推定可能なことを確認した。
 - ハザードレートのシングルファクターモデルと確率ボラティリティモデルにおいてソニーの 5 年物 CDS スプレッドを用いた推定を行い、推定が可能であることを確認した。
 - モデルの比較に関しては、シングルファクターモデルと比較し確率ボラティリティモデルのほうが CDS の観測値に対し当てはまりが良いことを確認した。
 - ハザードレートとそのボラティリティの関係については、正の相関がみられ、ハザードレートが上昇するときにボラティリティが高くなり、ハザードレートが低下する時は、ボラティリティが低下する傾向が確認された。

課題

- Particle Learning の拡張において、2 重のモンテカルロ近似を必要とし、メモリと計算速度に関して数値計算上の負荷は大きくなり、効率的なプログラミングや並列計算等の工夫が必要となる。
- 特にスプレッドの式 (1) の評価に時間がかかる。GPU によるプログラミングやスーパーコンピュータを用いた分析などを用い粒子数を増やすことにより推定の精度を高めることや、計算速度を速める工夫を行い、柔軟な分析が可能になることが期待される。
- フィルタリングにおいて、Carvalho et al. (2010) の方法と異なり、パラメータの学習において提案分布によるサンプリングとリサンプリングを行うことで、退化の問題が生じることとなる。
- リスクの市場価格を 0 として計算を行ったが、実際にはリスクの市場価格は 0 ではない。例として、状態方程式から導出されるパラメータの事後分布を提案分布とし、サンプリングする方法が考えられる。
- 本研究の応用としては、CDS の理論値を用いた裁定取引戦略、推定されたハザードレートを用いた同一参照隊の他のクレジットデリバティブの評価への応用、他の一般状態空間モデルの推定問題における応用などがあげられる。

主要参考文献

- 三崎 広海 (2011), 「粒子フィルタによる信用リスクの推定」, 『日本統計学会誌』, **41**, 1-21.
- Carvalho, C. M., M. Johannes, H. F. Lopes and N. G. Polson (2010), Particle Learning and Smoothing, *Statistical Science*, **25**, 88-106.
- Jarrow, R., H. Li and X., Ye (2011), Exploring Statistical Arbitrage Opportunities in the Term Structure of CDS Spreads, Working Paper, National University of Singapore.
- Liu, J., and West, M. (2001). Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering, (pp. 197-223). Springer New York.
- Pitt, M., and N. Shephard (1999), Filtering via simulation: Auxiliary particle filters, *Journal of the American Statistical Association*, **94**, 590-599.
- Storvik, G. (2002), Particle Filters for State-Space Models with the Presence of Unknown Static Parameters, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, **50**(2), 281-289.
- Takahashi, A., and S. Sato (2001), A Monte Carlo Filtering Approach for Estimating the Term Structure of Interest Rates, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53**(1), 50-62.
- Zhang, F. X. (2008), Market Expectations and Default Risk Premium in Credit Default Swap Prices, *The Journal of Fixed Income*, **18**(1), 37-55.

確率空間の設定

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ を完備なフィルター化確率空間とし, Q はリスク中立確率測度とする. 無リスク債券の価格が (\mathcal{F}_t) -適合過程であるとして, r_t を無リスク金利とする.
- この確率空間上で定義される $[0, \infty]$ 値の \mathcal{F} -可測な確率変数 τ をデフォルト時刻とする. さらに τ を 2 重確率的な確率時刻と考える.
- τ に付随するジャンプ指示過程 Y_t を, $t \geq 0$ に対して $Y_t = I_{\{\tau \leq t\}}$ で定義する. Y_t は, デフォルト時刻 τ において 0 から 1 にジャンプする右連続な確率過程とする.
- $\mathcal{H}_t = \sigma(\{Y_s : s \leq t\})$ および, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ とする.
デフォルトは観測可能であり, 投資家は, 背景の Filtration \mathcal{F}_t に含まれる情報を入手することができる. 実際には \mathcal{G}_t が入手可能と仮定できる.
- $F(t) = P(\tau \leq t)$ を τ の分布関数とし, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ を τ の生存関数とする. F が絶対連続で密度関数 f を持つとき, 関数

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

を τ のハザードレートと呼ぶ.